

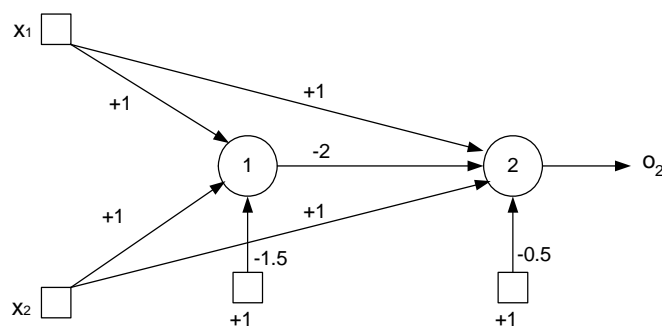
Άσκηση

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα νευρωνικό δίκτυο για την επίλυση του προβλήματος XOR. Οι νευρώνες 1 και 2 του δικτύου χρησιμοποιούν τη συνάρτηση κατωφλίου

$$(g(u) = \begin{cases} 1, u \geq 0 \\ 0, u < 0 \end{cases}) \text{ σαν συνάρτηση ενεργοποίησης.}$$

(α) Δείξτε αν όντως το δίκτυο επιλύει το XOR πρόβλημα κατασκευάζοντας έναν πίνακα αλήθειας του δικτύου.

(β) Για το νευρωνικό δίκτυο επίλυσης του προβλήματος XOR του υποερωτήματος (α) να δείξετε αν όντως επιλύεται το πρόβλημα με τη χρήση περιοχών απόφασης.



Απάντηση

(α) Όπως φαίνεται από το σχήμα:

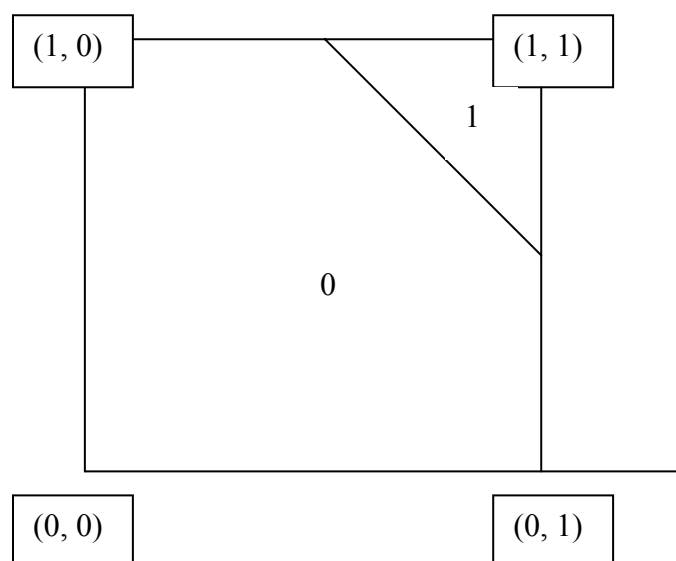
- x_1 και x_2 είναι οι τιμές των εισόδων του Perceptron,
- $b_1 = 1.5$ και $b_2 = 0.5$ είναι οι πολώσεις αντίστοιχα των νευρώνων 1 και 2.
- o_2 είναι η έξοδος του νευρώνα 2 και κατά συνέπεια του δικτύου.

Αν θεωρήσουμε ότι o_1 είναι η έξοδος του νευρώνα 1 τότε ο πίνακας αλήθειας θα έχει ως εξής:

x_1	x_2	$u_1 = 1*x_1 + 1*x_2 - 1.5$	o_1	$u_2 = 1*x_1 + 1*x_2 - 2*o_1 - 0.5$	o_2	Στόχος
0	0	$1*0 + 1*0 - 1.5 = -1.5$	0	$1*0 + 1*0 - 2*0 - 0.5 = -0.5$	0	0
0	1	$1*0 + 1*1 - 1.5 = -0.5$	0	$1*0 + 1*1 - 2*0 - 0.5 = 0.5$	1	1
1	0	$1*1 + 0*1 - 1.5 = -0.5$	0	$1*1 + 1*0 - 2*0 - 0.5 = 0.5$	1	1
1	1	$1*1 + 1*1 - 1.5 = 0.5$	1	$1*1 + 1*1 - 2*1 - 0.5 = -0.5$	0	0

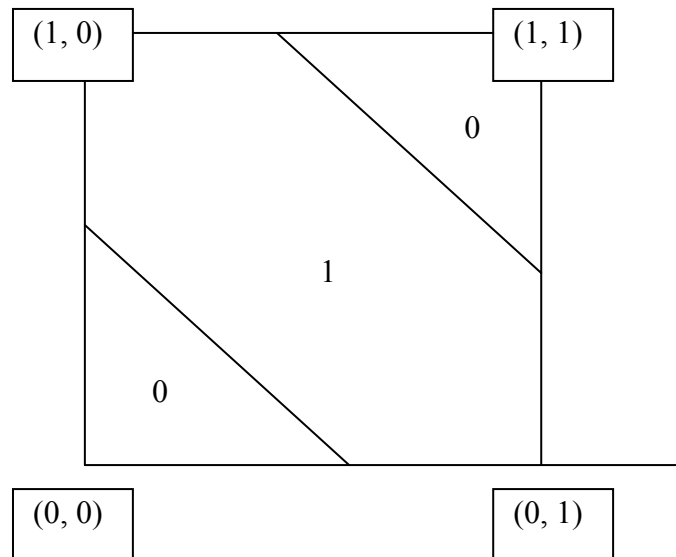
Συνεπώς μια και η έξοδος του δικτύου συμφωνεί σε όλες τις περιπτώσεις με την τιμή στόχο, το συγκεκριμένο δίκτυο Perceptron επιλύει το πρόβλημα XOR.

(β) Οι περιοχές απόφασης για τον πρώτο νευρώνα του δικτύου έχουν ως εξής:



δεδομένου ότι ο πρώτος νευρώνας δίνει έξοδο ίση με τη μονάδα, μόνο στην περίπτωση που η είσοδοι είναι $x_1=1$ και $x_2 = 1$, δηλαδή στην περιοχή $(1,1)$.

Αντίστοιχα τώρα για την έξοδο του νευρώνα 2 που είναι και η τελική έξοδος του δοσμένου δικτύου οι περιοχές απόφασης έχουν ως εξής:



Το σχήμα αυτό φανερώνει ότι το δίκτυο έχει σαν έξοδο 0 στις περιοχές $(0,0)$ και $(1,1)$ και έξοδο 1 στις περιοχές $(0,1)$ και $(1,0)$ που είναι και το ζητούμενο για τη συνάρτηση XOR.

